



TITLE:

# Transferと同変写像のLefschetz数 (同変ホモトピー論)

AUTHOR(S):

中岡, 稔

---

CITATION:

中岡, 稔. Transferと同変写像のLefschetz数 (同変ホモトピー論). 数理解析研究所講究録 1978, 319: 100-106

ISSUE DATE:

1978-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103986>

RIGHT:

# Transfer と同変写像の Lefschetz 数

阪大理 中 岡 稔

$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  をファイバー空間とし,  $B$  は CW 複体,  $F$  は有限複体とする.  $f: E \rightarrow E$  を恒等写像  $\text{id}: B \rightarrow B$  のファイバーを保つ連続写像とし,  $f = f|_F: F \rightarrow F$  の Lefschetz 数を  $\lambda_f$  で表わす. このとき, 準同型  $\tau_f: H^*(E) \rightarrow H^*(B)$  であって,  $\tau_f \circ p^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B)$  は  $\lambda_f$  倍する写像となるものが存在することは Becker-Carson-Gottlieb より示されている ([1]).  $\tau_f$  は fixed point transfer とよばれている.  $\tau_f \neq 0$  ならば  $f$  は不動点をもつからである.

この小論文では, <sup>の仕事</sup> 恒等写像をほんの少し modify することにより, ファイバーが多様体に向きつくファイバー空間の場合には上の transfer を一般化した coincidence transfer とよばれるべき準同型が存在すること, および同変写像の Lefschetz 数に関する定理が得られることを示そう.

以下,  $M_1, M_2$  は連結で何きのついた閉じた位相多様体とし, それらはともに  $n$  次元であるとする. このとき連続写像  $f, g: M_1 \rightarrow M_2$  に対し, 合成

$$H^*(M_1; \mathbb{Q}) \xrightarrow{f_!} H^*(M_2; \mathbb{Q}) \xrightarrow{g^*} H^*(M_1; \mathbb{Q})$$

( $f_!$  は Gysin 準同型) を考え, この写像の Lefschetz 数を  $\lambda_{f,g}$  で表わす.  $f$  または  $g$  が恒等写像のときは  $\lambda_{f,g}$  は通常の  $\lambda_g$  または  $\lambda_f$  に一致し,  $U'_2 \in H^n(M_2 \times M_2)$  を  $M_2$  の対角コホモロジー類とすると,

$$(1) \quad \lambda_{f,g} = \langle (f, g)^* U'_2, [M_1] \rangle \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ. また,  $\lambda_{f,g} \neq 0$  ならば  $f$  と  $g$  は coincidence (すなわち  $f(x) = g(x)$  となる点  $x \in M_1$ ) を持つ. ([2] 参照.)

さて, 同一の底空間  $B$  上の 2 つの局所自明なファイバー空間

$$M_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} B, \quad M_2 \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} B$$

が与えられたとし,

$$\bar{f}, \bar{g}: E_1 \rightarrow E_2$$

を恒等写像  $\text{id}: B \rightarrow B$  上のファイバーを保つ連続写像とする.  $f, g: M_1 \rightarrow M_2$  は  $\bar{f}, \bar{g}$  のファイバー上への制限を表わすとする.

補題  $\pi_1(B)$  の  $H^n(M_1), H^n(M_2)$  上への作用が自明な

は,  $H^n(E_1)$  の元  $\Lambda_{f,g}$  を

$$\langle \iota^*(\Lambda_{f,g}), [M_1] \rangle = \lambda_{f,g}$$

と定めるものが存在する。

実際, Thom 同型

$$\phi_i: H^*(E_i) \cong H^{*+n}(E_i \times_B E_i, E_i \times_B E_i - dE_i)$$

( $d$  は 対角写像) を考え,

$$\bar{U}_i = \phi_i(1), \quad \bar{U}'_i = \bar{U}_i|_{E_i \times_B E_i}$$

とおけば ( $i=1, 2$ ), (1) より

$$\Lambda_{f,g} = \phi_1^{-1}(\bar{U}_1 \cup (f \times g)^* \bar{U}'_2)$$

は求めるものが存在することはわかる。

次の定理の  $\tau_{f,g}$  を Coincidence transfer とよぶ。

定理 1  $\pi_1(B)$  の  $H^n(M_1), H^n(M_2)$  上への作用が自明ならば, 準同型

$$\tau_{f,g}: H^*(E_1) \rightarrow H^*(B)$$

で,  $\tau_{f,g} \circ p_1^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B)$  は  $\Lambda_{f,g}$  倍する写像とあるものが存在する。

実際,

$$\tau_{f,g}(\alpha) = p_{1!}(\alpha \cup \Lambda_{f,g}) \quad (\alpha \in H^*(B))$$

と定義すればよい。

注意 1. 冒頭に述べた fixed point transfer の存在定理は  $p_1 = p_2$  で  $g = \text{id}$  の場合の定理 1 を基幹として, 順

次に一般化する事によって導かれるのである ( [3] ),  
それを真似て定理 1 をもっと一般化する (例えば  $\pi_1$   
(B) の作用に関する仮定をゆる) ことはできない.

注意 2.  $B$  が有限複体の場合には fixed point transfer は  $S$  写像で実現でき, (したがってそれは一般コホモロジーに対しても定義でき 非常に価値のある応用をもつ) <sup>[4]</sup> coincidence transfer が  $S$  写像で実現できるかどうかについては筆者は知らない.

上に述べた補題よりまた次の定理が得られる.

定理 2. 有限群  $G$  が  $M_1, M_2$  上に何れを保つ同相写像によって作用し,  $G$  の  $M_1$  上への作用は自由と仮定する.  
 $f, g: M_1 \rightarrow M_2$  を同変写像とするとき,  $\lambda_{f,g}$  は  $G$  の位数  $|G|$  で割り切れる.

実際, ファイバー空間

$$M_1 \xrightarrow{i_1} E_G \times_G M_1 \xrightarrow{p_1} B_G, \quad M_2 \xrightarrow{i_2} E_G \times_G M_2 \xrightarrow{p_2} B_G$$

をファイバーを保つ連続写像

$$\bar{f} = i_1 \times f, \quad \bar{g} = i_1 \times g: E_G \times_G M_1 \rightarrow E_G \times_G M_2$$

に対し, 補題を適用して得られる  $\lambda_{\bar{f}, \bar{g}} \in H^n(E_G \times_G M_1)$   
を  $H^n(M_1/G)$  の元とみなせば,

$$\langle p_1^*(\lambda_{\bar{f}, \bar{g}}), [M_1] \rangle = \lambda_{f,g}$$

が成り立つから, 求める結果が得られる.

系1. 定理2の仮定に加えて、さらに  $M_1$  はホモロジー球面と仮定する。このとき同変写像  $f: M_1 \rightarrow M_2$  の写像度は  $|G|$  を法としてすべて同じである。

とくに

系2.  $M$  を有限群  $G$  が自由に作用するホモロジー球面とすると、同変写像  $f: M \rightarrow M$  の写像度は  $1 \pmod{|G|}$  である。

注意. 系2はホモトピー球面の場合には[5]で別の方法で示されている。

最後に、定理2に関連して次のことを注意しておく。

$M$  を連結で何ものついた閉多様体とし、その上に有限群  $G$  が何ものを保って自由に作用しているとき、同変写像  $f: M \rightarrow M$  の Lefschetz 数  $\lambda_f$  は  $|G|$  の倍数であることが定理2より得られるが、 $G$  が Artin-Tate 群 (すなわち  $G$  の可換部分群はすべて巡回群であるような有限群) のときは、同様のことが任意の有限複体に対して成り立つ。すなわち

定理3. 有限複体  $X$  上に Artin-Tate 群  $G$  が自由に作用しているとき、同変写像  $f: X \rightarrow X$  の Lefschetz 数は  $|G|$  で割り切れる。

実際、ファイバー空間  $X \xrightarrow{i} E_G \times_G X \xrightarrow{p} B_G$  と写像

$f = \text{id}_X$  に対し冒頭の定理を適用すれば,

$$\tau_f \circ p^* = \lambda_f : H^*(B_G) \rightarrow H^*(B_G)$$

となる準同型  $\tau_f : H^*(E_G \times_G X) \rightarrow H^*(B_G)$  が存在するが,

十分大きな  $g$  に対しては:  $H^g(E_G \times_G X) = H^g(X/G) = 0$

で, また,  $G$  が Artin-Tate 群であることから  $H^g(B_G) = \mathbb{Z}|G|$  となる  $g$  が無限に存在するから ([2]),  $\lambda_f \equiv 0 \pmod{|G|}$  が成り立つ.

注意 定理3は  $G$  が有限巡回群の場合に [6] で示されている. また,  $G$  が有限巡回群で  $f = \text{id}$  の場合はもっと古典的で [7] で示されている.

## 文 献

- [1] Becker-Carson-Gottlieb: The Lefschetz number and fibre preserving maps. Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975).
- [2] 中岡 稔: 不動点定理とその周辺 (岩波書店), 1977.
- [3] Gottlieb: Fibre bundles and the Euler characteristic. J. Diff. Geom. 10 (1975).
- [4] Becker-Gottlieb: The transfer map and fibre bundles, Topology 14 (1975).
- [5] Rubinsztein: On the equivariant homotopy of spheres, Dissertationes Mathematicae 134 (1976).

[6] Casson-Gottlieb: Fibrations with compact fibres, Amer. J. Math. 99 (1975).

[7] Floyd: On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952).